SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP NỘI SUY B−SPLINE ĐỂ ĐÁNH GIÁ SAI SỐ TRONG MIỀN TẦN SỐ CỦA BỘ BIẾN ĐỔI TÍN HIỆU DAC

USING B−SPLINE INTERPOLATION METHOD TO ESTIMATE THE INFORMATION ERROR IN FREQUENCE DOMAIN OF DAC

Nguyễn Doãn Phước

Trường Đại học Bách khoa Hà Nội

TÓM TẮT

Bộ chuyển đổi tín hiệu DAC có nhiệm vụ khôi phục tín hiệu từ dạng số sang tương tự. Việc khôi phục tín hiệu đó sẽ gây ra sai lệch thông tin mà tín hiệu cần truyền tải. Bài báo sử dụng phương pháp nội suy B−Spline để phân tích sai lệch trên trong miền tần số, mà ở đó bản chất chuyển đổi tín hiệu từ dạng số sang tương tự được nhìn nhận như một phép nội suy hàm liên tục từ dãy các giá trị đo được của nó. Kết quả nghiên cứu cho thấy mọi bộ biến đổi DAC làm việc theo nguyên tắc nội suy B−pline bậc chẵn lớn hơn 0 đều có nguy cơ tạo ra một tín hiệu liên tục với sai số lớn trong miền tần số, thậm chí còn tồn tại những điểm tần số mà ở đó sai số thông tin là vô cùng.

ABSTRACT

The DAC is an equipment often used for reconstruction of continuous signal from its sample data. This reconstruction procedure causes obviously an information error, which is carried out by the signal, such as the error in frequence domain. The essences of this error have been analysed in this paper by using B−Spline interpolation techniques to describe the mapping from digital values of a signal to its analog expresssion. The obtained analysing results of this paper show that the using of DA converter, which is based on B−spline of even grade excepting the zerro grade, will bring a huge information error in frequence domain, even infinite in some frequences.

I. ĐẶT VẤN ĐỀ

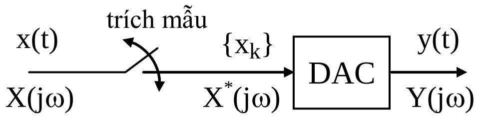
Hình 1 mô tả nguyên lý làm việc của các thiết bị DAC để khôi phục tín hiệu liên tục x(t) từ dãy các giá trị đo được của nó $\{x_k\}$, k=0,1, ..., N, trong khoảng thời gian hữu hạn [0,NT], trong đó $x_k=x(kT)$ và T là chu kỳ trích mẫu tín hiệu. Kết quả thu được là tín hiệu liên tục y(t) và tín hiệu này có quan hệ:

$$y(kT) = x(kT),\ \ k=0,1,\ldots,N \tag{1}$$

với tín hiệu gốc x(t). Các bộ khôi phục tín hiệu khác nhau sẽ tạo ở đầu ra những tín hiệu liên tục khác nhau. Hiển nhiên là từ dãy hữu hạn $\{x_k\}$ các giá trị ta sẽ có vô số hàm liên tục y(t) thỏa mãn điều kiện (1), nên về nguyên tắc cũng sẽ có vô số các bộ biến đổi DAC. Vấn đề nghiên cứu đặt ra ở đây là cần phải chỉ ra được bộ biến đổi DAC nào sẽ cho ra sai lệch thông tin trong miền tần số tính theo:

$$\delta = \sup_{\omega} \left| Y(j\omega) - X(j\omega) \right| \tag{2}$$

đủ nhỏ chấp nhận được, chẳng hạn như trong một dải sai lệch đủ nhỏ cho trước, trong đó $X(j\omega)$, $Y(j\omega)$ là ký hiệu chỉ ảnh Fourier của các tín hiệu liên tục x(t) và y(t) được tính trong khoảng thời gian [0,NT].



Hình 1. Mô tả quá trình khôi phục tín hiệu

Đã có nhiều công trình nghiên cứu vấn đề được đặt ra ở trên như [1,4,5]. Tiếp cận theo hướng tương tự, nhưng với công cụ nội suy B−Spline, bài báo này sẽ xem quá trình khôi phục tín hiệu của bộ biến đổi DAC chính là việc nội suy từng đoạn dãy giá trị $\{x_i\}$, i=m,m+1, ... ,2m−1 với mỗi đoạn có m giá trị, để được $\left[\frac{N}{m}\right]$ hàm liên tục $y_i(t)$, i=1, ..., $\left[\frac{N}{m}\right]$, trong đó ký hiệu [x] chỉ phép tính lấy phần nguyên của số thực x. Sau đó "dán" các hàm liên tục $y_i(t)$ này với nhau thành tín hiệu y(t) trơn, khả vi m–1 lần. Nguyên tắc nội suy B–Spline này mô tả đúng quy trình khôi phục tín hiệu của bộ biến đổi DAC bậc m.

II. MÔ HÌNH HÓA KHỐI DAC BẬC m BẰNG PHÉP NỘI SUY B–SPLINE

Cũng giống như các phương pháp nội suy nói chung, nội suy B–Spline là phương pháp được xây dựng dựa trên các hàm mô hình cục bộ, gọi là hàm B–Spline gốc. Ký hiệu hàm B–Spline gốc bậc m là $f_m(t)$, m=0,1, ... thì theo Bezier [1], [4], [6] tất cả các hàm B–Spline gốc sẽ có quan hệ truy hồi với nhau như sau:

$$f_0(t) = \frac{1(t) - 1(t-T)}{T} \tag{3}$$

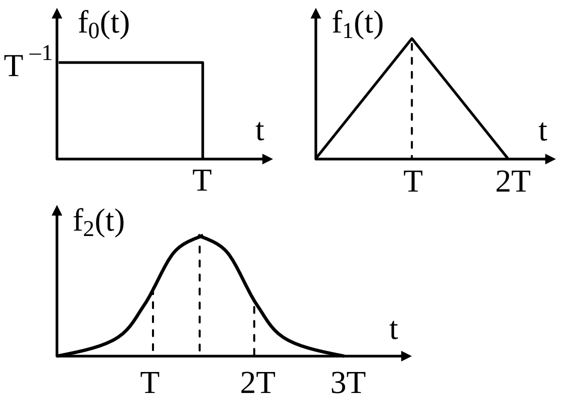
và

$$f_m(t) = f_0(t) * f_{m-1}(t) \tag{4}$$

trong đó * là ký hiệu phép tích chập. Các hàm B–Spline gốc này đều thỏa mãn:

$$\operatorname*{supp}_t f_m(t) = [0, mT]$$

tức là $f_m(t)=0$ khi $t \notin [0,mT]$. Hình 2 minh họa các hàm B–Spline gốc bậc 0,1 và 2.



Hình 2. Hàm B–Spline gốc bậc 0,1 và 2.

Từ hai công thức (3), (4) định nghĩa của Bezier ta cũng suy ra được:

$$f_m(t) = \frac{m+1}{T^{m+1}} \sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \frac{(t-kT)^m 1(t-kT)}{k!(m+1-k)!}$$

trong đó 1(t) là ký hiệu chỉ hàm Heviside. Với công thức trên thì rõ ràng hàm $f_m(t)$ nhận giá trị cực đại tại $\frac{m+1}{2}T$ và có ảnh Fourier là:

$$F_m(j\omega) = \left(\frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega T} \right)^{m+1}$$

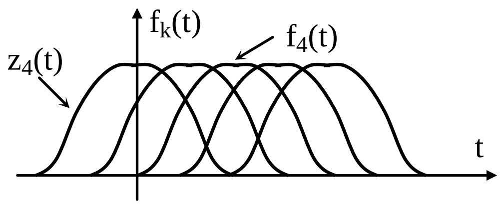
Ta sẽ sử dụng công thức mô tả hàm $f_m(t)$ như trên để mô hình hóa quá trình biến đổi $\{x_k\} \rightarrow y(t)$. Nhằm có được lượng thông tin entropie lớn trong mỗi khoảng cục bộ [6], tức là trong các khoảng cục bộ i=m,m+1, ... ,2m–1 cũng sẽ có sự tham gia của nhiều hàm gốc $f_m(t)$, ta sẽ dịch $f_m(t)$ sang trái một khoảng $\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil T$, với $\lceil x \rceil$ là ký hiệu chỉ số nguyên nhỏ nhất nhưng không nhỏ hơn x, sao cho hàm $z_m(t)$ nhận được có điểm cực đại gần đối xứng qua gốc (hình 3), chẳng hạn như:

$z_0(t)=f_0(t)$, $z_1(t)=f_1(t-T)$, $z_2(t)=f_2(t-T)$, ...

Vậy thì khi "dán" các hàm $z_m(t)$ này lại với nhau để có y(t) thì:

$$y(t) = \sum_{n=0}^{N} a_n z_m(t - nT) \tag{5}$$

với a_n, n=0,1, ... , N là những số thực được xác định từ x_k, k=0,1, ... , N theo quan hệ (1) phải có.



Hình 3. Mô tả hàm gốc thích hợp cho việc mô hình hóa.

Thay điều kiện (1) vào (5), rồi viết lại nó lần lượt cho n=0,1, ... , N ta sẽ có N+1 phương trình. Biểu diễn chung các phương trình đó dưới dạng ma trận, ta được:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} z_m(0) & \cdots & z_m(-NT) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z_m(NT) & \cdots & z_m(0) \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix}}_{\underline{a}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

Suy ra:

$$\underline{a} = A^{-1}\underline{b} \qquad (6)$$

và đó là công thức xác định vector các tham số a_n, n=0,1, ... , N cho mô hình (5) mô tả quá trình biến đổi $\{x_k\}\rightarrow y(t)$.

Từ mô hình (5) trong miền thời gian ta kiểm tra ngay được rằng khối DAC với tín hiệu vào $\{x_k\}$ và ra y(t) là một khâu tuyến tính (thỏa mãn nguyên lý xếp chồng), bởi vậy nó sẽ mô tả được bằng hàm truyền G(s), tức là mô tả được bởi (hình 1):

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X^*(j\omega)}$$

trong đó $Y(j\omega)$ là ảnh Fourier của y(t) và $X^*(j\omega)$ là của $\{x_k\}$. Vì có quan hệ (1) nên giữa hai ảnh Fourier này phải có tương quan Shannon:

$$TX^*(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y\left[j(\omega - k\frac{2\pi}{T})\right]$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_m(j(\omega - k\frac{2\pi}{T}))\sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{-j\omega nT}$$

trong đó $Z_m(j\omega)$ là ảnh Fourier của hàm gốc:

$$z_m(t) = f_m(t-\tau) \quad \text{với} \quad \tau = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil T$$

và ảnh Fourier này được suy ra từ (3) và (4) với ảnh Fourier $F_0(j\omega)$ của hàm $f_0(j\omega)$ là:

$$F_0(j\omega) = \frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega T}$$

như sau:

$$Z_m(j\omega) = \left(\frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega T}\right)^{m+1} e^{j\omega\tau} \qquad (7)$$

Ngoài ra, từ (5) ta còn có:

$$Y(j\omega) = Z_m(j\omega)\sum_{n=0}^{N} a_n e^{-j\omega nT} \qquad (8)$$

Suy ra:

$$G(j\omega) = \frac{Z_m(j\omega)}{T\sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_m(j(\omega - k\frac{2\pi}{T}))} \qquad (9)$$

Thay (7) vào (9) và để ý rằng:

$$Z_m(j(\omega - k\frac{2\pi}{T})) = \left(\frac{1-e^{-j\omega T}}{j(\omega - k\frac{2\pi}{T})T}\right)^{m+1} e^{j\omega\tau}$$

ta được:

$$G(j\omega) = \frac{\frac{1}{\omega^{m+1}}}{T\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\omega - k\frac{2\pi}{T})^{m+1}}}$$
$$= \frac{\frac{d^m}{d\omega^m}\left(\frac{1}{\omega}\right)}{\frac{d^m}{d\omega^m}\left(T\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega - k\frac{2\pi}{T}}\right)}$$

Lại để ý tiếp khi m=0 thì:

$$G(j\omega) = \frac{1}{\omega T\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega - k\frac{2\pi}{T}}} \qquad (10)$$

cũng như từ (8):

$$Y(j\omega) = Z_0(j\omega)\sum_{n=0}^{N} a_n e^{-j\omega nT}$$
$$= \frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega T} e^{j\omega\tau}\sum_{n=0}^{N} a_n e^{-j\omega nT}$$
$$= \frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega T} e^{j\omega\tau} X^*(j\omega)$$

$$\Leftrightarrow \quad G(j\omega) = \frac{1-e^{-j\omega T}}{j\omega} \quad \text{khi m=0} \qquad (11)$$

thì khi so sánh (10) với (11) ta rút ra được:

$$T\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\omega - k\frac{2\pi}{T}} = \frac{j}{1-e^{-j\omega T}} \qquad (12)$$

Cuối cùng, thay (12) vào công thức tổng quát của $G(j\omega)$ ta đi đến hàm đặc tính tần số của khâu chuyển đổi tín hiệu DAC với cấu trúc mô tả ở hình 1, như sau:

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X^*(j\omega)} = \frac{\frac{d^m}{d\omega^m}\left(\frac{1}{\omega}\right)}{j\frac{d^m}{d\omega^m}\left(\frac{1}{1-e^{-j\omega T}}\right)} \qquad (13)$$

Đó cũng chính là mô hình toán học biểu diễn quá trình khô phục tín hiệu $\{x_k\} \rightarrow y(t)$ trong miền tần số.

III. ĐÁNH GIÁ SAI SỐ THÔNG TIN TRONG MIỀN TẦN SỐ

Dựa vào hàm đặc tính tần (13) mô tả bộ chuyển đổi tín hiệu số–tương tự DAC trong miền tần số ta nhận thấy ngay được rằng:

1. Khi m=0 ta có:

$$\left|G(j\omega)\right| = \frac{T\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}$$

2. Khi m=1 thì:

$$\left|G(j\omega)\right| = T\left(\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right)^2$$

3. Khi m=2 thì:

$$\left|G(j\omega)\right| = \frac{T}{\cos\frac{\omega T}{2}}\left(\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right)^3$$

4. Khi m=3 thì:

$$\left|G(j\omega)\right| = \frac{3T}{2+\cos(\omega T)}\left(\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right)^4$$

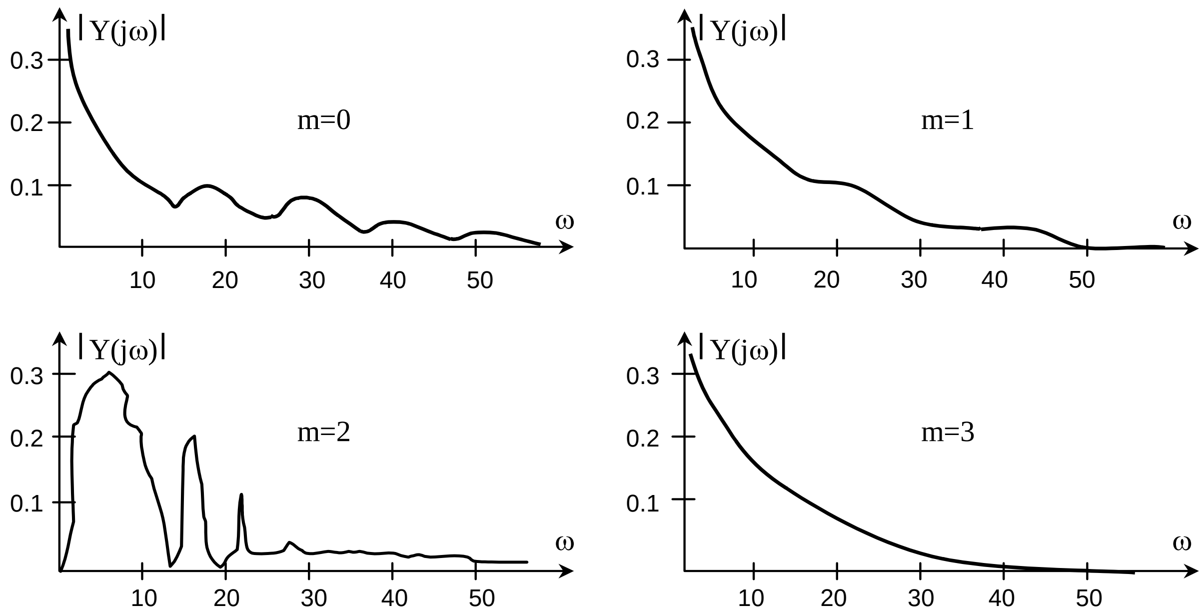
5. Khi m=4 thì:

$$\left|G(j\omega)\right| = \frac{6T}{\cos\frac{\omega T}{2}\left[5+\cos(\omega T)\right]}\left(\frac{\sin\frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}}\right)^5$$

Như vậy tại tất cả các điểm tần số $\omega T=(2k+1)\pi$, hàm $G(j\omega)$ ứng với m=2 hoặc m=4 có giá trị là $\pm\infty$. Suy ra ở các tần số này, kết quả y(t) thu được sau khi khôi phục tín hiệu sẽ có sai lệch tần số so với tín hiệu gốc x(t) cũng là ∞. Tương tự ta cũng có được kết luận này với m=6, 8, ... Điều này chỉ rằng việc sử dụng tất cả những khối DAC bậc chẵn lớn hơn 0 sẽ làm cho sai lệch thông tin theo nghĩa (2) tại các điểm tần số $\omega T=(2k+1)\pi$ là ∞.

IV. VÍ DỤ MINH HỌA

Hình 4 là kết quả thực nghiệm minh họa kết luận nêu trên về sai lệch thông tin ở miền



Hình 4. Đồ thị ảnh Fourier của các tín hiệu liên tục thu được với DAC bậc 0,1,2,3

tần số của tín hiệu gốc ban đầu:

$$x(t)=e^{-3t},\ t\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad X(j\omega)=\frac{1}{3+j\omega}$$

Tín hiệu gốc được trích 8 mẫu với chu kỳ $T_x=10^{-1}$s thành dãy $\{x_k\}$, k=0, 1, ... ,7. Dãy đó lại được tái tạo lần lượt bởi DAC bậc 0,1,2,3 theo công thức (5) và (6) thành tín hiệu liên tục y(t). Tín hiệu liên tục y(t) sau khi đã được tái tạo sẽ được trích mẫu với chu kỳ trích mẫu $T_y=10^{-2}$s thành dãy N=128 giá trị $\{y_k\}$, k=0, 1, ... ,127.

Áp dụng DFT [3] mà cụ thể là thuật toán Fourier nhanh FFT [2] để tính ảnh Fourier của dãy $\{y_k\}$ trên ta được $Y(jk\Omega)$, k=0, 1, ... ,127, với $\Omega=\frac{\pi}{NT_y}=\frac{\pi}{0.64}$ là chu kỳ trích mẫu trong miền tần số. Đồ thị biên độ $Y(j\omega)$ của tín hiệu liên tục y(t) được biểu diễn ở hình 4. Từ đó, một lần nữa ta thấy việc sử dụng DAC bậc 2 đã gây ra sai lệch thông tin tần số rất lớn so với các khối DAC bậc 0,1,3 còn lại.

V. KẾT LUẬN

Các khối DAC bậc m với nhiệm vụ khôi phục tín hiệu liên tục y(t) từ dãy hữu hạn giá trị trích mẫu $\{x_k\}$, k=0, 1, ... ,N theo nguyên tắc (1), và khi chu kỳ trích mẫu T là đủ nhỏ, sẽ luôn tạo ta được sai số trong miền thời gian:

$$\sup_t |y(t)-x(t)| \qquad (14)$$

tỷ lệ nghịch với bậc m của khối, tức là với những khối DAC có bậc càng cao, sai lệch thông tin (14) ở miền thời gian càng nhỏ. Nhận định này rất dễ dẫn tới sự ngộ nhận cho rằng cứ sử dụng khối DAC càng cao, mọi thông tin được phục hồi sẽ càng chính xác.

Kết quả của bài báo bất ngờ đã chỉ ra điều ngược lại. Không phải mọi sự xấp xỉ nào khi đã được xem là tốt trong miền thời gian theo nghĩa (14) cũng sẽ tốt trong miền phức theo nghĩa (2). Thậm chí nếu cứ sử dụng khâu DAC bậc chẵn lớn hơn 0 như m=2,4, ..., tín hiệu liên tục y(t) được khôi phục sẽ còn chứa đựng sai lệch thông tin ở miền tần số so với tín hiệu gốc là vô cùng lớn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. *Horowitz L.L.;* The Effects of Spline Interpolation on Power Spectral Estimation; IEEE Transaction on ASSP, 22, pp. 22–27 (1974).
2. *Brigham E.O.*; Fast Fourier Transform; Verlag R.Oldenburg, München, Wien (1987).
3. *Marple S.L.*; Digital Spectral Analysis with Application; Prentice Hall (1993).
4. *Isermann, R;* Identifikation Dynamischer Systeme; Springer Verlag (1994).
5. *Rabiner L.R., Allen J.B.*; Short Times Fourrier Analysis Techniques for FIR System Identification and Power Spectrum Estimation. IEEE Transaction on ASSP, 27, pp. 182–192 (1979).
6. *Wu N.*; An Explicit Solution and Data Extention in the Maximum Entropie Method; IEEE Trans. on ASSP, 35, pp. 486–491 (1987)

Địa chỉ liên hệ: Nguyễn Doãn Phước - Tel. (04) 3868.0451, email: phuocnd-ac@mail.hut.edu.vn
Bộ môn Điều khiển Tự động, Khoa Điện
Trường Đại học Bách khoa Hà Nội - Số 1, Đại Cồ Việt, Hà Nội